

концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m , n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O .

76 Теорема о пересечении высот треугольника

Мы доказали, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Ранее было доказано, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (п. 64). Оказывается, аналогичным свойством обладают и высоты треугольника.

Теорема

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 , содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 229).

Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A , B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно,

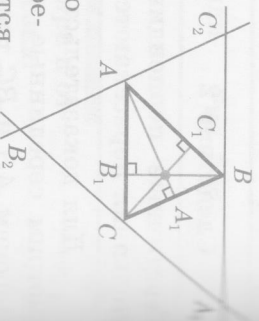


Рис. 229

они пересекаются в одной точке. **Теорема доказана.**

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот (или их продолжений). Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

Задачи

Из точки M биссектрисы неразвёрнутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A . Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA .

Стороны угла A касаются окружности с центром O радиуса r . Найдите: а) OA , если $r = 5$ см, $\angle A = 60^\circ$; б) r , если $OA = 14$ дм, $\angle A = 90^\circ$.

Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что точка O является центром окружности, касающейся прямых AB , BC , AC .

Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите углы ACM и BCM , если: а) $\angle AMB = 136^\circ$; б) $\angle AMB = 111^\circ$.

Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D . Найдите: а) AD и CD , если $BD = 5$ см, $AC = 8,5$ см; б) AC , если $BD = 11,4$ см, $AD = 3,2$ см.

Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке D стороны BC . Докажите, что: а) точка D — середина стороны BC ; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E . Найдите основание AC , если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB = 18$ см.

Равнобедренные треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB . Докажите, что прямая CD проходит через середину отрезка AB .

Докажите, что если в треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, то медиана AM треугольника не является высотой.