Следствие 2

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

В самом деле, обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведём из этой точки перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 225). По доказанной теореме $OK = OM$ и $OK = OL$. Поэтому $OM = OL$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

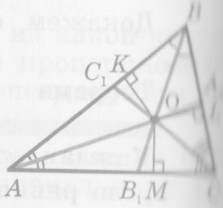

Рис. 225

75 Свойства серединного перпендикуляра к отрезку

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

На рисунке 226 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

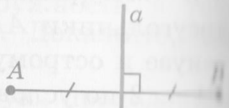

Рис. 226

Докажем теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

Теорема

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

Доказательство

Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 227, *а*).

1) Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам ($OA = OB$, OM — общий катет), поэтому $AM = BM$.

2) Рассмотрим произвольную точку N, равноудалённую от концов отрезка AB, и докажем, что точка N лежит на прямой m. Если N — точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и потому лежит на прямой m. Если же точка N не лежит на прямой AB, то треугольник ANB равнобедренный, так как $AN = BN$ (рис. 227, *б*). Отрезок NO — медиана этого треугольника, а значит, и высота. Таким образом, $NO \perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, т. е. N — точка прямой m. **Теорема доказана.**

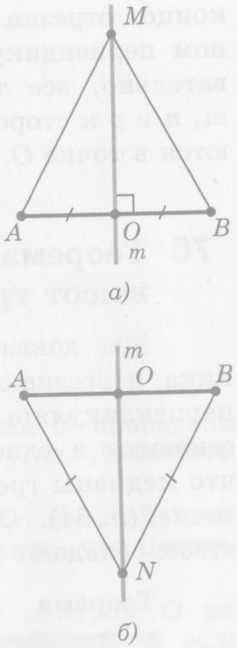

Рис. 227

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Следствие 2

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 228). Эти прямые пересекаются в некоторой точке O. В самом деле, если предположить противное, т. е. что $m \parallel n$, то прямая BA, будучи перпендикулярной к прямой m, была бы перпендикулярна и к параллельной ей прямой n, а тогда через точку B проходили бы две прямые BA и BC, перпендикулярные к прямой n, что невозможно.

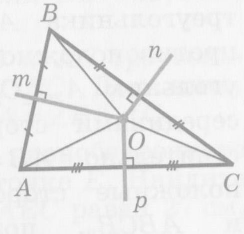

Рис. 228

По доказанной теореме $OB = OA$ и $OB = OC$. Поэтому $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от