666 Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если а) $AE=5$, $BE=2$, $CE=2{,}5$; б) $AE=16$, $BE=9$, $CE=ED$; в) $AE=0{,}2$, $BE=0{,}5$, $CE=0{,}4$.

667 Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает её в точке C. Найдите BB_1, если $AC=4$ см, $CA_1=8$ см.

668 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

669 Пользуясь утверждением, сформулированным в задаче 668, постройте отрезок, равный среднему пропорциональному для двух данных отрезков.

670 Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках P и Q. Докажите, что $AB^2=AP\cdot AQ$.

671 Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Найдите CD, если: а) $AB=4$ см, $AC=2$ см; б) $AB=5$ см, $AD=10$ см.

672 Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках B_1 и C_1, а другая — в точках B_2 и C_2. Докажите, что $AB_1\cdot AC_1=AB_2\cdot AC_2$.

673 К данной окружности постройте касательную, проходящую через данную точку вне окружности.

Решение

Пусть даны окружность с центром O и точка A вне этой окружности. Допустим, что задача решена и AB — искомая касательная (рис. 223). Так как прямая AB перпендикулярна к радиусу OB, то решение задачи сводится к построению точки B окружности, для которой $\angle ABO$ прямой. Эту точку можно построить следующим образом: проводим отрезок OA и строим его середину O_1. Затем проводим окружность с центром в точке O_1 радиуса O_1A. Эта окружность пересекает данную окружность в двух точках: B и B_1. Прямые AB и AB_1 — искомые касательные, так как $AB\perp OB$ и $AB_1\perp OB_1$. Действительно, углы ABO и AB_1O, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на полуокружности, поэтому они прямые. Очевидно, задача имеет два решения.

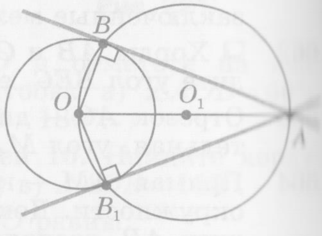

Рис. 223

§3 Четыре замечательные точки треугольника

74 Свойства биссектрисы угла

Докажем сначала теорему о биссектрисе угла.

Теорема

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон[1]**.**

Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

Доказательство

1) Возьмём произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC и докажем, что $MK=ML$ (рис. 224). Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и AML. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle 1=\angle 2$ по условию). Следовательно, $MK=ML$.

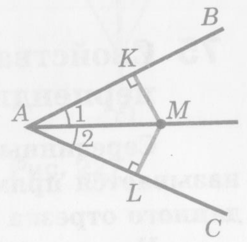

Рис. 224

2) Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (см. рис. 224). Проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AMK и AML равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK=ML$ по условию). Следовательно, $\angle 1=\angle 2$. Но это и означает, что луч AM — биссектриса угла BAC. **Теорема доказана.**

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, лежащих внутри неразвёрнутого угла и равноудалённых от сторон угла, является биссектриса этого угла.

[1] То есть равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.