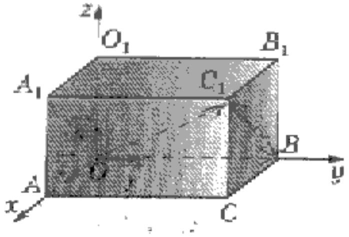

Рис. 131

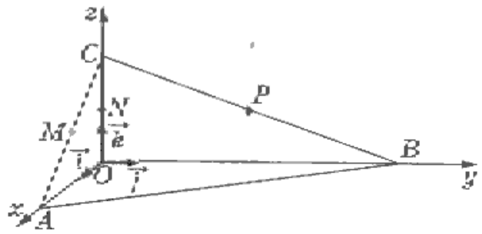

Рис. 132

402 Даны координаты четырех вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$: $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (0;\ 0;\ 1)$, $D\ (0;\ 1;\ 0)$ и $A_1\ (1;\ 0;\ 0)$. Найдите координаты остальных вершин куба.

403 Запишите координаты векторов: $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{d} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{m} = \vec{k} - \vec{i}$, $\vec{n} = 0{,}7\vec{k}$.

404 Даны векторы $\vec{a}\ \{5;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b}\ \{-3;\ -1;\ 0\}$, $\vec{c}\ \{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{d}\ \{0;\ 0;\ 0\}$. Запишите разложения этих векторов по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

405 На рисунке 131 изображен прямоугольный параллелепипед, у которого $OA = 2$, $OB = 3$, $OO_1 = 2$. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OO_1}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{O_1C}$ в системе координат $Oxyz$.

406 Докажите, что каждая координата суммы (разности) двух векторов равна сумме (разности) соответствующих координат этих векторов.

407 Даны векторы $\vec{a}\ \{3;\ -5;\ 2\}$, $\vec{b}\ \{0;\ 7;\ -1\}$, $\vec{c}\left\{\frac{2}{3};\ 0;\ 0\right\}$ и $\vec{d}\ \{-2{,}7;\ 3{,}1;\ 0{,}5\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{c}$; в) $\vec{b} + \vec{c}$; г) $\vec{d} - \vec{b}$; д) $\vec{d} + \vec{a}$; е) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{b} - \vec{a} - \vec{d}$; з) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$.

408 По данным рисунка 132 найдите координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OP}$, если $OA = 4$, $OB = 9$, $OC = 2$, а M, N и P — середины отрезков AC, OC и CB.

409 Даны векторы $\vec{a}\ \{5;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b}\ \{-2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{c}\ \{0;\ 0{,}2;\ 0\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{3};\ 2\frac{2}{5};\ -\frac{1}{7}\right\}$. Найдите координаты векторов: а) $\vec{a} - \vec{b}$; б) $\vec{b} - \vec{a}$; в) $\vec{a} - \vec{c}$; г) $\vec{d} - \vec{a}$; д) $\vec{c} - \vec{d}$; е) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; ж) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; з) $2\vec{a}$; и) $-3\vec{b}$; к) $-6\vec{c}$; л) $-\frac{1}{3}\vec{d}$; м) $0{,}2\vec{b}$.

410 Даны векторы $\vec{a}\ \{-1;\ 2;\ 0\}$, $\vec{b}\ \{0;\ -5;\ -2\}$ и $\vec{c}\ \{2;\ 1;\ -3\}$. Найдите координаты векторов $\vec{p} = 3\vec{b} - 2\vec{a} + \vec{c}$ и $\vec{q} = 3\vec{c} - 2\vec{b} - \vec{a}$.

411 Даны векторы $\vec{a}\ \{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\ \{0;\ 2;\ -2\}$, $\vec{c}\ \{-3;\ 2;\ 0\}$ и $\vec{d}\ \{-2;\ 1;\ -$
Найдите координаты векторов: а) $3\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$; б) $-\vec{a} + 2\vec{c} - \vec{d}$; в) $0{,}1$
$+ 3\vec{b} - 0{,}7\vec{c} - 5\vec{d}$; г) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - \vec{b})$.

412 Найдите координаты векторов, противоположных следующим ве
торам: $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{a}\ \{2;\ 0;\ 0\}$, $\vec{b}\ \{-3;\ 5;\ -7\}$, $\vec{c}\ \{-0{,}3;\ 0;\ 1{,}75\}$.

413 Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}\ \{3;\ 6;\ 8\}$ и $\vec{b}\ \{6;\ 12;\ 16\}$; б) $\vec{c}\ \{1;\ -1;$
и $\vec{d}\ \{2;\ 3;\ 15\}$; в) $\vec{i}\ \{1;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$; г) $\vec{m}\ \{0;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{n}\ \{5;\ 7;\ -$
д) $\vec{p}\left\{\frac{1}{3};\ -1;\ 5\right\}$ и $\vec{q}\ \{-1;\ -3;\ -15\}$?

Решение

а) Координаты вектора $\vec{a}\ \{3;\ 6;\ 8\}$ пропорциональны координат
вектора $\vec{b}\ \{6;\ 12;\ 16\}$: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{8}{12} = k$, где $k = \frac{1}{2}$. Поэтому $\vec{a} = k\vec{b}$,
следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c}\ \{1;\ -1;\ 3\}$ не пропорциональны коорди
там вектора $\vec{d}\ \{2;\ 3;\ 15\}$, например $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}$. Поэтому векторы $\vec{c}$
не коллинеарны. В самом деле, если предположить, что век
ры $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, то существует такое число k, что $\vec{c} = k\vec{d}$.
тогда координаты вектора $\vec{c}$ пропорциональны координатам век
ра $\vec{d}$, что противоречит условию задачи.

414 Найдите значения m и n, при которых следующие векторы колли
арны: а) $\vec{a}\ \{15;\ m;\ 1\}$ и $\vec{b}\ \{18;\ 12;\ n\}$; б) $\vec{c}\ \{m;\ 0{,}4;\ -1\}$ и $\vec{d}\left\{-\frac{1}{2};\ n\right.$

415 Компланарны ли векторы: а) $\vec{a}\ \{-3;\ -3;\ 0\}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$; б) $\vec{b}\ \{2;\ 0;\ -3\}$, $\vec{i}$
в) $\vec{c}\ \{1;\ 0;\ -2\}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$; г) $\vec{d}\ \{1;\ -1;\ 2\}$, $\vec{e}\ \{-2;\ 0;\ 1\}$ и $\vec{f}\ \{5;\ -1;$
д) $\vec{m}\ \{1;\ 0;\ 2\}$, $\vec{n}\ \{1;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{p}\ \{-1;\ 2;\ 4\}$; е) $\vec{q}\ \{0;\ 5;\ 3\}$, $\vec{r}\ \{3;\ 3;$
и $\vec{s}\ \{1;\ 1;\ 4\}$?

Решение

г) Векторы $\vec{d}\ \{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{e}\ \{-2;\ 0;\ 1\}$ не коллинеарны, так
координаты одного не пропорциональны координатам другого.
ли вектор $\vec{f}\ \{5;\ -1;\ 0\}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то век
ры $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны. Если же вектор $\vec{f}$ нельзя разложить
векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ не компланарны (в против
случае вектор $\vec{f}$ можно было бы разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$).
ким образом, для решения задачи нужно установить, можно

Задача 3

Найти расстояние от точки до плоскости, если известны координаты точки и уравнение плоскости.

Решение

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — данная точка, $ax + by + cz + d = 0$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$ — уравнение данной плоскости α, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — проекция точки M_0 на плоскость α. Поскольку точка M_1 лежит в плоскости α, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0. \qquad (4)$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ (если $\overrightarrow{M_0M_1} \neq \vec{0}$), как и вектор $\vec{n}\{a; b; c\}$, перпендикулярен к плоскости α, поэтому $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$ (если $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{0}$, то также $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}$). Следовательно, существует такое число k, что $\overrightarrow{M_0M_1} = k\vec{n}$. Запишем это равенство в координатах:

$$x_1 - x_0 = ka,\quad y_1 - y_0 = kb,\quad z_1 - z_0 = kc. \qquad (5)$$

Заметим, наконец, что искомое расстояние l равно длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, т. е. равно $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$. Таким образом, с учетом равенств (5) получаем:

$$l = |k|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \qquad (6)$$

Выразим теперь координаты точки M_1 из уравнений (5) и подставим их в уравнение (4):

$$a(ka + x_0) + b(kb + y_0) + c(kc + z_0) + d = 0.$$

Отсюда находим

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Таким образом, формула (6) принимает вид

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Задачи

441 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{B_1C}$; б) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1B}$; г) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AD_1}$; ж) $\overrightarrow{A_1D_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; з) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{C_1C}$.

442 Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен φ. Найдите углы $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{DC}}$, $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}}$, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{DC}}$.

443 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a, точка O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{C_1A_1}$; в) $\overrightarrow{D_1B}$ и $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$; д) $\overrightarrow{A_1O_1}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$; е) $\overrightarrow{D_1O_1}$ и $\overrightarrow{B_1O_1}$; ж) $\overrightarrow{BO_1}$ и $\overrightarrow{C_1B}$.

444 Даны векторы $\vec{a}\{1; -1; 2\}$, $\vec{b}\{-1; 1; 1\}$ и $\vec{c}\{5; 6; 2\}$. Вычислите $\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{a}$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}$.

445 Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{j} - 5\vec{k}$. Вычислите: а) $\vec{a}\vec{b}$; б) $\vec{a}\vec{i}$; в) $\vec{b}\vec{j}$; г) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{k}$; д) $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{k} + \vec{i} - 2\vec{j})$.

446 Даны векторы $\vec{a}\{3; -1; 1\}$, $\vec{b}\{-5; 1; 0\}$ и $\vec{c}\{-1; -2; 1\}$. Выясните, какой угол (острый, прямой или тупой) между векторами: а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

447 Дан вектор $\vec{a}\{3; -5; 0\}$. Докажите, что: а) $\widehat{\vec{a}\vec{i}} < 90°$; б) $\widehat{\vec{a}\vec{j}} > 90°$; в) $\widehat{\vec{a}\vec{k}} = 90°$.

448 Даны векторы $\vec{a}\{-1; 2; 3\}$ и $\vec{b}\{5; x; -1\}$. При каком значении x выполняется условие: а) $\vec{a}\vec{b} = 3$; б) $\vec{a}\vec{b} = -1$; в) $\vec{a} \perp \vec{b}$?

449 Даны векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При каком значении m векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

450 Даны точки $A(0; 1; 2)$, $B(\sqrt{2}; 1; 2)$, $C(\sqrt{2}; 2; 1)$ и $D(0; 2; 1)$. Докажите, что $ABCD$ — квадрат.

451 Вычислите угол между векторами: а) $\vec{a}\{2; -2; 0\}$ и $\vec{b}\{3; 0; -3\}$; б) $\vec{a}\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$ и $\vec{b}\{-3; -3; 0\}$; в) $\vec{a}\{0; 5; 0\}$ и $\vec{b}\{0; -\sqrt{3}; 1\}$; г) $\vec{a}\{-2,5; 2,5; 0\}$ и $\vec{b}\{-5; 5; 5\sqrt{2}\}$; д) $\vec{a}\{-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -2\}$ и $\vec{b}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1\right\}$.

452 Вычислите углы между вектором $\vec{a}\{2; 1; 2\}$ и координатными векторами.

453 Даны точки $A(1; 3; 0)$, $B(2; 3; -1)$ и $C(1; 2; -1)$. Вычислите угол между векторами $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

454 Найдите углы, периметр и площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(1; -1; 3)$, $B(3; -1; 1)$ и $C(-1; 1; 3)$.

455 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислите косинус угла между векторами: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC_1}$.