Упражнения

Найдите промежутки возрастания и убывания функций (279—281).

279.— а) $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$; б) $f(x) = -x^2 - 2x - 3$;

в) $f(x) = 4x - 5$; г) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$.

280.— а) $f(x) = -\frac{2}{x} - 1$; б) $f(x) = x^2(x - 3)$;

в) $f(x) = \frac{x-3}{x}$; г) $f(x) = x^3 - 27x$.

281.— а) $f(x) = 12x - 3x^2 - 2x^3$; б) $f(x) = 4 - x^4$;

в) $f(x) = x(x^2 - 12)$; г) $f(x) = \frac{3}{x^2}$.

282.— Постройте эскиз графика функции f, удовлетворяющей условиям:

а) $D(f) = [-2; 5]$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-2; 5)$;

б) $D(f) = [1; 6]$, $f'(x) < 0$ при $x \in (1; 3) \cup (3; 6)$, $f'(3) = 0$;

в) $D(f) = [-2; 5]$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-2; 1) \cup (1; 5)$, $f'(1) = 0$;

г) $D(f) = [1; 6]$, $f'(x) < 0$ при $x \in (1; 6)$.

Найдите промежутки возрастания и убывания и постройте графики функций (283—284).

283.— а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$; б) $f(x) = 4x^3 - 1{,}5x^4$;

в) $f(x) = 2 - 9x + 3x^2 - x^3$; г) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

284.— а) $f(x) = 2 - \frac{4}{0{,}5x-1}$; б) $f(x) = |x - 3| - 2$;

в) $f(x) = 8x^2 - x^4$; г) $f(x) = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$.

285.— Докажите, что функция f возрастает на R, а функция g убывает на R:

а) $f(x) = 3x - \cos 2x$; б) $g(x) = -\frac{x^3}{3} - x$;

в) $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3$; г) $g(x) = -4x + \sin 3x$.

286.— Докажите, что уравнение имеет единственный корень на каждом из данных промежутков P_1 и P_2:

а) $x^3 - 27x + 2 = 0$, $P_1 = [-1; 1]$, $P_2 = [4; 6]$;

б) $x^4 - 4x - 9 = 0$, $P_1 = [-2; 0]$, $P_2 = [2; 3]$;

в) $x^4 + 6x^2 - 8 = 0$, $P_1 = [-2; -1]$, $P_2 = [1; 2]$;

г) $-1 - 3x^2 - x^3 = 0$, $P_1 = [-2; 0]$, $P_2 = [2; 3]$.

23. Критические точки функции, максимумы и минимумы

Мы рассмотрели поведение функции на промежутках, где $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции (рис. 103 и 104). Сформулируем соответствующее утверждение, его называют *теоремой Ферма* (в честь французского математика П ь е р а Ф е р м а).

Необходимое условие экстремума.
Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f', то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

Рассмотрим случай $f'(x_0) > 0$. По определению производной отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$, а следовательно, и само будет положительно при всех x, достаточно близких к x_0. Для таких x

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0,$$

и, значит, $f(x) > f(x_0)$ для всех $x > x_0$ из некоторой окрестности точки x_0. Поэтому x_0 не является точкой максимума.

Если же $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$, и, следовательно, x_0 не может быть и точкой минимума f.

Случай $f'(x_0) < 0$ разбирается аналогично.

Важно отметить, что теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, не обязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, производная функции $f(x) = x^3$ обращается

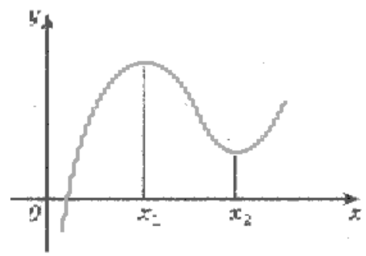

Рис. 103

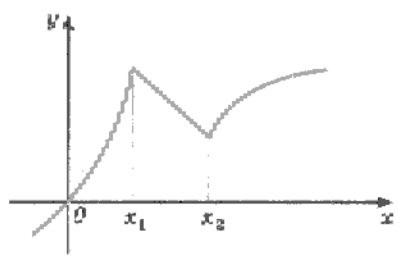

Рис. 104

нимума, получаем, что точка −1 является точкой минимума, а точка 1 — точкой максимума функции f. График функции изображен на рисунке 108.

Упражнения

287.— Найдите критические точки функции, график которой изображен на рисунке 109.

288.— Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = 4 - 2x + 7x^2$; б) $f(x) = 1 + \cos 2x$;

в) $f(x) = x - 2\sin x$; г) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$.

289.— Найдите точки максимума и минимума функции f, график которой изображен на рисунке 110. Существует ли производная в соответствующей точке? Если существует, то чему равно ее значение?

290.— Найдите критические точки функции. Определите, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума:

а) $f(x) = 5 + 12x - x^3$; б) $f(x) = 9 - 8x^2 - x^4$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4$; г) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2$.

291.— Докажите, что функция f не имеет критических точек:

а) $f(x) = \sqrt{x}$; б) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

в) $f(x) = 3x - 7$; г) $f(x) = 3x^5 + 2x$.

Найдите критические точки функции f (292—293).

292.— а) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$; б) $f(x) = 2x - \frac{5}{x^2}$;

в) $f(x) = 10\cos x - \sin 2x - 6x$; г) $f(x) = x^3 - 4x + 8$.

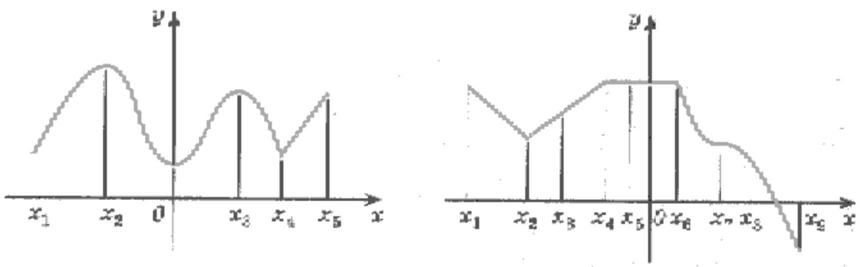

Рис. 109

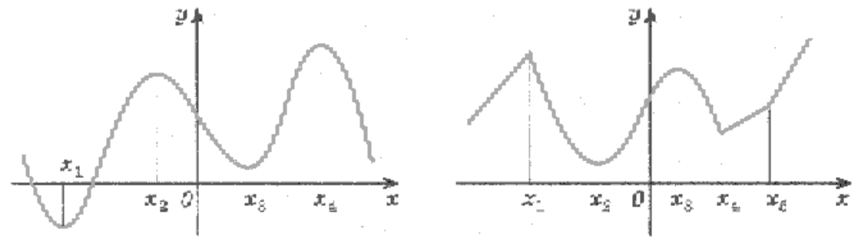

Рис. 110

293.— а) $f(x) = (x-2)^3$; б) $f(x) = \begin{cases} -x-2 \text{ при } x \leqslant -1, \\ x \text{ при } -1 < x < 1, \\ 2-x \text{ при } x \geqslant 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$; г) $f(x) = \begin{cases} x-6 \text{ при } x < -2, \\ x^2 \text{ при } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 6-x \text{ при } x > 2. \end{cases}$

294.— Постройте эскиз графика функции, обладающей следующими свойствами:

а) $D(f) = [-3; 5]$; $f'(x) > 0$ при $x \in (-3; 1)$, $f'(x) < 0$ при $x \in (1; 5)$ и $f'(1) = 0$;

б) $D(f) = [-3; 5]$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-3; 1)$, $f'(x) > 0$ при $x \in (1; 5)$ и функция f не имеет производной в точке 1;

в) $D(f) = [a; b]$; x_1 — точка минимума, x_2 — точка максимума функции, $f(a) > f(b)$;

г) $D(f) = [a; b]$; x_1 — точка максимума, x_2 — точка минимума, $f(a) = f(b)$.

295.— Исследуйте функцию на возрастание, убывание и экстремумы. Постройте график функции:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$; б) $f(x) = \frac{3x}{1-x^2}$;

в) $f(x) = 2x - \frac{1}{6}x^3$; г) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

24. Примеры применения производной к исследованию функции

Вы уже знаете (п. 4), что построение графика функции лучше начинать с ее исследования, которое состоит в том, что для данной функции: 1) находят ее область определения; 2) выясняют, является ли функция f четной или нечетной, является ли периодической. Далее находят: 3) точки пересечения графика с осями координат; 4) промежутки знакопостоянства; 5) промежутки возрастания и убывания; 6) точки экстремума и значения f в этих

Упражнения

Исследуйте функцию и постройте ее график (296—297).

296.— а) $f(x) = x^2 - 2x - 8$; б) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} - x + \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$; г) $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

297.— а) $f(x) = -x^3 - 3x - 2$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x^2 - x^3$.

298.— Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $f(x) = 1 + 1{,}5x - 3x^2 - 2{,}5x^3$;

б) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x - 1$;

в) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x - 5$;

г) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$.

299.— Докажите, что функция f возрастает на множестве R:

а) $f(x) = 2x - \cos x$; б) $f(x) = x^5 + 4x$;

в) $f(x) = \sin x + \frac{3x}{2}$; г) $f(x) = 2x^3 - x - 5$.

Исследуйте функцию и постройте ее график (300—302).

300.— а) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5$; б) $f(x) = 4x^2 - x^4$;

в) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 1\frac{1}{3}x^3$; г) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

301.— а) $f(x) = x^2\sqrt{1+x}$; б) $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$;

в) $f(x) = x\sqrt{2-x}$; г) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

302.— а) $f(x) = \sin^2 x + \sin x$; б) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$;

в) $f(x) = \cos^2 x - \cos x$; г) $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

303.— Докажите, что функция f принимает на данном промежутке положительные значения:

а) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$; $I = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$; $I = [1; \infty)$;

в) $f(x) = x - \sin x$; $I = (0; \infty)$;

г) $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - \cos x$; $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

304.— Сколько корней имеет уравнение:

а) $4x^3 - 3x^2 - 36x - 10 = 0$;

б) $\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x = 0$;

в) $x^4 - 4x^3 - 9 = 0$;

г) $x^2 - \frac{x^3}{3} - 1 = 0$?

25. Наибольшее и наименьшее значения функции

Решение практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается теорема Вейерштрасса: *непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения*, т. е. на $[a; b]$ существуют точки, в которых f принимает наибольшее и наименьшее на $[a; b]$ значения.

Для случая, когда функция f не только непрерывна на отрезке $[a; b]$, но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем *правило отыскания наибольшего и наименьшего значений f.*

Предположим сначала, что f не имеет на отрезке $[a; b]$ критических точек. Тогда (п. 23) она возрастает (рис. 112) или убывает (рис. 113) на этом отрезке, и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$ — это значения в концах a и b.

Пусть теперь функция f имеет на отрезке $[a; b]$ конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок $[a; b]$ на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Поэтому наибольшее и наименьшее значения функции f на таких отрезках принимаются в их концах, т. е. в критических точках функции или в точках a и b.

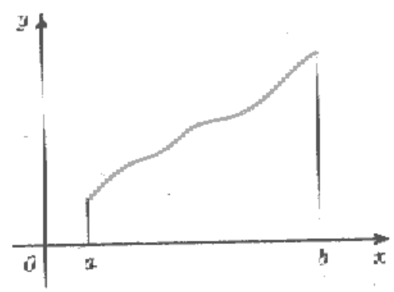

Рис. 112

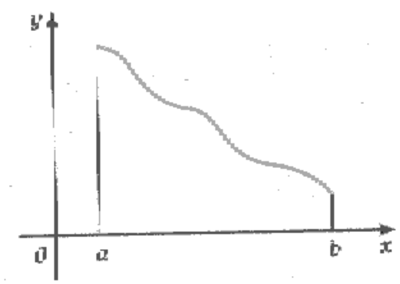

Рис. 113