Глава IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника

§ 1 Сумма углов треугольника

30 Теорема о сумме углов треугольника

Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что

$$\angle A+\angle B+\angle C=180°.$$

Проведем через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 124). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4=\angle 1,\ \angle 5=\angle 3. \qquad (1)$$

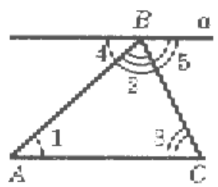


Рис. 124

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развернутому углу с вершиной B, т. е. $\angle 4+\angle 2+\angle 5=180°$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°$, или $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. **Теорема доказана.**

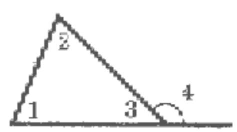


Рис. 125

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Докажем, что

внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Обратимся к рисунку 125, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника. Так как $\angle 4+\angle 3=180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1+\angle 2)+\angle 3=180°$, то $\angle 4=\angle 1+\angle 2$, что и требовалось доказать.

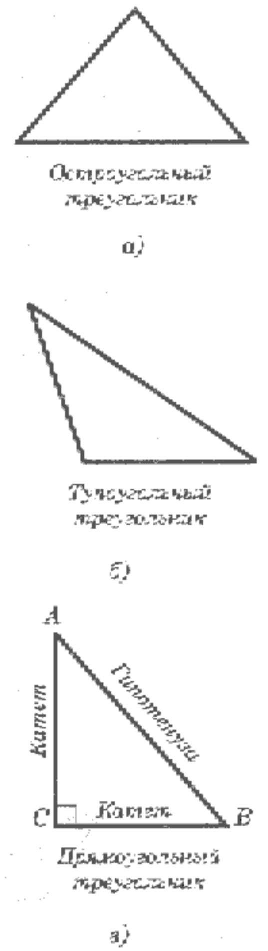


Рис. 126

31 Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других углов не превосходит 90° и поэтому каждый из них острый. Таким образом, **в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.**

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рис. 126, *а*). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется **тупоугольным** (рис. 126, *б*). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется **прямоугольным**. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами**. На рисунке 126, *в* изображен прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.

Задачи

223 Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A=65°$, $\angle B=57°$; б) $\angle A=24°$, $\angle B=130°$; в) $\angle A=\alpha$, $\angle B=2\alpha$; г) $\angle A=60°+\alpha$, $\angle B=60°-\alpha$.

224 Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A:\angle B:\angle C=2:3:4$.

225 Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.

226 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника острые.

227 Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в два раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в три раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

228 Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) $40°$; б) $60°$; в) $100°$.

229 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

230 Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

231 Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

232 Верно ли утверждение: если треугольник равнобедренный, то один из его внешних углов в два раза больше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом?

233 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

234 Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $115°$. Найдите углы треугольника.

235 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

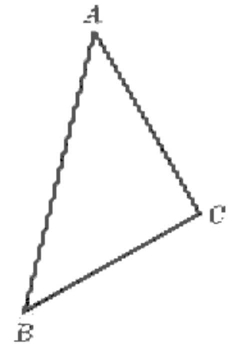
32 Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема

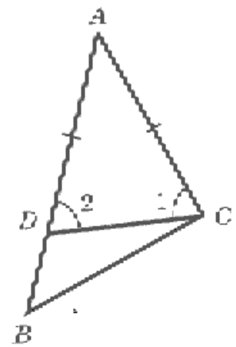
В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство

1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 127, *а*). Докажем, что $\angle C > \angle B$.



а)



б)

Рис. 127

Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 127, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$.

Предположим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный и, значит, $\angle C = \angle B$. Во втором случае $\angle B > \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). И то и другое противоречит условию: $\angle C > \angle B$. Поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, $AB > AC$. Теорема доказана.

Следствие 1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Следствие 2

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

Докажем этот признак. Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны и стороны, лежащие против этих углов. Действительно, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то угол, лежащий против нее, будет больше угла, лежащего против другой стороны, а это противоречит условию (тому, что данные углы равны). Итак, в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник — равнобедренный.

33 Неравенство треугольника

Теорема

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 128). В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1$ и, значит, $\angle ABD > \angle 2$. Так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$. Теорема доказана.

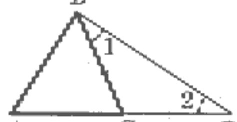


Рис. 128

Следствие

Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.

Каждое их этих неравенств называется неравенством треугольника.

Вопросы и задачи

236 Сравните углы треугольника ABC и выясните, может ли быть угол A тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

237 Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

238 Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

239 Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведенной из той же вершины.

240 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

241 Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

242 Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

243 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

244 Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE — равнобедренный.

245 Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

246 На рисунке 129 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр $\triangle EDO$ равен длине отрезка BC.

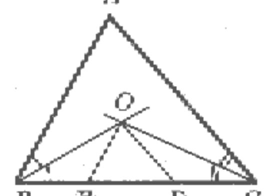


Рис. 129

247 На рисунке 130 $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что: а) треугольник BOC — равнобедренный; б) прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

248 Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

249 В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

250 Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 7 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

251 Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

Решение

Докажем, например, что в треугольнике ABC $AB > AC - BC$. Так как $AB + BC > AC$, то $AB > AC - BC$.

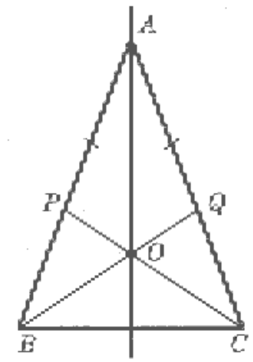


Рис. 130