

Проблема решения уравнений в натуральных числах подробно рассматривалась в работах известного греческого математика Диофанта (III в.). В его трактате «Арифметика» приводятся остроумные способы решения в натуральных числах самых разнообразных уравнений. В связи с этим уравнения с несколькими переменными, для которых требуется найти решения в натуральных или целых числах, называют диофантовыми уравнениями.

Рассмотрим задачу, в которой надо найти натуральные решения уравнения с двумя переменными.

**Задача.** Группу из 35 туристов решили расселить на теплоходе в трехместные и четырехместные каюты так, чтобы в каютах не оставалось свободных мест. Сколько трехместных и сколько четырехместных кают надо заказать?

► Допустим, что надо заказать  $x$  трехместных и  $y$  четырехместных кают. Тогда

$$3x + 4y = 35.$$

Требуется найти все пары натуральных значений переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие этому уравнению.

Из уравнения  $3x + 4y = 35$  находим, что

$$y = \frac{35 - 3x}{4}.$$

Подставляя в это равенство вместо  $x$  последовательно числа 1, 2, 3 и т. д., найдем, при каких натуральных значениях  $x$  соответствующие значения  $y$  являются натуральными числами:

если  $x=1$ , то  $y=8$ ;

если  $x=5$ , то  $y=5$ ;

если  $x=9$ , то  $y=2$ .

Других пар натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению  $3x + 4y = 35$ , нет, так как при других натуральных значениях  $x$  соответствующее значение  $y$  является либо дробным положительным числом, либо отрицательным числом.

Значит, надо заказать соответственно трехместных и четырехместных кают либо 1 и 8, либо 5 и 5, либо 9 и 2. ◀

### Упражнения

**1025.** Является ли уравнение с двумя переменными линейным:

а)  $3x - y = 17$ ;      в)  $13x + 6y = 0$ ;

б)  $x^2 - 2y = 5$ ;      г)  $xy + 2x = 9$ ?

**1026.** Является ли пара чисел  $x = 1\frac{6}{7}$  и  $y = 4\frac{3}{7}$  решением уравнения  $x + y = 6$ ? Укажите еще два решения этого уравнения.

**1027.** Пары значений переменных  $x$  и  $y$  указаны в таблице:

$x$	-5	-4	-3	-1	0	4	5
$y$	0	8	4	-3	-5	-3	0

Какие из них являются решениями уравнения:

а)  $2x + y = 5$ ;      б)  $x + 8y = -5$ ?

**1028.** Является ли решением уравнения  $10x + y = 12$  пара чисел  $(8; -20)$ ,  $(-2; 12)$ ,  $(0,1; 11)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 1)$ ?

**1029.** Составьте какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел:

а)  $x = 2, y = 4,5$ ;      б)  $x = -1, y = 2$ .

**1030.** Из линейного уравнения  $4x - 3y = 12$  выразите:

а)  $y$  через  $x$ ;      б)  $x$  через  $y$ .

**1031.** Из уравнения  $2u + v = 4$  выразите:

а) переменную  $v$  через  $u$ ;      б) переменную  $u$  через  $v$ .

**1032.** Выразите из данного уравнения переменную  $y$  через  $x$ ; используя полученную формулу, найдите три каких-либо решения этого уравнения:

а)  $3x + 2y = 12$ ;      б)  $5y - 2x = 1$ .

**1033.** Выразив из уравнения  $x - 6y = 4$  переменную  $x$  через  $y$ , найдите три каких-либо решения этого уравнения.

**1034.** Выразив переменную  $y$  через переменную  $x$ , найдите три каких-либо решения уравнения:

а)  $3x - y = 10$ ;      б)  $6x + 2y = 7$ .

**1035.** Среди решений уравнения  $x + 2y = 18$  найдите такую пару, которая составлена из двух одинаковых чисел.

**1036.** Найдите значение коэффициента  $a$  в уравнении  $ax + 2y = 8$ , если известно, что пара  $x = 2, y = 1$  является решением этого уравнения.

**1037.** Из двухрублевых и пятирублевых монет составлена сумма в 28 р. Сколько было взято двухрублевых монет?

**1038.** Ученик купил тетради по 5 р. и карандаши по 7 р. Сколько тетрадей купил ученик, если известно, что за всю покупку он заплатил 44 р.?

**1039.** Хозяйка купила глубокие и мелкие тарелки, заплатив за покупку 320 р. Глубокая тарелка стоит 35 р., а мелкая — 80 р. Сколько глубоких и сколько мелких тарелок купила хозяйка?

1040. Му

ка

1041. В р

мо

1042. На

5

1043. На

а)

б)

1044. Р

а)

41. Гра

с двум

Кан

ыми  $x$

двумя

ни  $x, y$

уравнен

Гр

ст

яв

Выс

Выс

Форм

ная фун

прямая  $4x$

$+ 2y = 6$

прямая  $3x$

$+ 2y = 6$

С

можно по

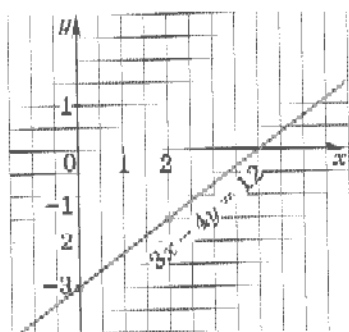


Рис. 76

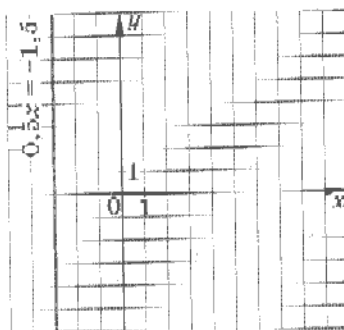


Рис. 77

Отметим точки  $(0; -3)$  и  $(2; 1,5)$  и проведем через них прямую (рис. 76). Эта прямая — график уравнения  $3x - 4y = 12$ .  $\triangleleft$

**Пример 2.** Построим график уравнения  $0,5x = -1,5$ .

► Это уравнение можно записать в виде  $0,5x + 0y = -1,5$ . Его решениями служат пары чисел, в которых  $x = -3$ ,  $y$  — произвольное число. Графиком уравнения является прямая, проходящая через точку  $(-3; 0)$  и параллельная оси  $y$  (рис. 77).  $\triangleleft$

### Упражнения

- 1045.** Принадлежит ли графику уравнения  $3x + 4y = 12$  точка:  
а)  $A(4; 1)$ ; б)  $B(1; 3)$ ; в)  $C(-6; -7,5)$ ; г)  $D(0; 8)$ ?
- 1046.** Каким из точек  $A(6; 1)$ ,  $B(-6; -5)$ ,  $C(0; 2)$ ,  $D(-1; 3)$  принадлежит графику уравнения  $x - 2y = 4$ ?
- 1047.** Докажите, что графики уравнений  $3x - y = -5$ ,  $x + 10y = 21$ ,  $11x + 21y = 81$  проходят через точку  $P(1; 2)$ .
- 1048.** Постройте график уравнения:  
а)  $2x - y = 6$ ;      в)  $x + 6y = 0$ ;      д)  $1,2x = 4,8$ ;  
б)  $1,5x + 2y = 3$ ;      г)  $0,5y - x = 1$ ;      е)  $1,5y = 6$ .



**ПЬЕР ФЕРМА** (1601–1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии и теории чисел. Занимался теорией решения алгебраических уравнений с несколькими переменными.

1049. Постройте график уравнения:

- а)  $x+y=5$ ;                      в)  $1,6x=4,8$ ;  
б)  $y-4x=0$ ;                      г)  $0,5y=1,5$ .

1050. Постройте график уравнения:

- а)  $x-y-1=0$ ;                      в)  $2(x-y)+3y-4$ ;  
б)  $3x=y+4$ ;                      г)  $(x+y)-(x-y)=4$ .

1051. На прямой, являющейся графиком уравнения  $21x-5y=100$ , взята точка, абсцисса которой равна 3. Найдите ординату этой точки.

1052. Известно, что ордината некоторой точки прямой, являющейся графиком уравнения  $12x-5y-182$ , равна 0. Найдите абсциссу этой точки.

1053. Не выполняя построения, определите, в каких координатных четвертях расположен график уравнения:

- а)  $12x-8y=25$ ;                      б)  $1,5y-150$ ;                      в)  $0,2x-43$ .



1054. Решите уравнение:

- а)  $\frac{16-x}{8} - \frac{18-x}{12} = 0$ ;                      б)  $\frac{x-15}{2} - \frac{2x+1}{8} + 1 = 0$ .

1055. Найдите значение выражения:

- а)  $a(a-4)-(a+4)^2$  при  $a = 1\frac{1}{4}$ ;  
б)  $(2a-5)^2 - 4(a-1)(3+a)$  при  $a = \frac{1}{12}$ .

## 42. Системы линейных уравнений с двумя переменными

**Задача.** Сумма двух чисел равна 12, а их разность равна 2. Найдите эти числа.

- Обозначим первое число буквой  $x$ , а второе буквой  $y$ . По условию задачи сумма чисел равна 12, т. е.

$$x+y=12.$$

Так как разность чисел равна 2, то

$$x-y=2.$$

Мы составили два уравнения с двумя переменными. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти такие значения переменных, которые обращают в верное равенство каждое из уравнений  $x+y=12$

и  $x-y=2$  в  
случае  
Систему  
ки. Состав

Пара анал  
уравнения  
деляется

Опреде  
менные  
клякрос

Решите  
доказать, что  
Для того  
ременными  
Пусть

Постро  
Графиком  
го — пряме  
Координ  
ния  $2x+3y=$   
нием уравн  
удовлетвор  
решением  
точке  $K(-2,$   
ственное р

Примече  
системы уравн  
Заметим, что  
позволяет  
женно.

Рассм  
уравнений  
из которых  
при пере  
всегда ли  
ли имеет

### Упражнения

**1056.** Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

пара чисел: а)  $x=3, y=1$ ; б)  $x=2, y=2$ ?

**1057.** Является ли пара чисел  $u=8, v=-1$  решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3u + v = 8, \\ 7u - 2v = 28; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} v + 2u = 5, \\ u + 2v = 1? \end{cases}$$

**1058.** Какие из пар  $(-8; 4), (-2; 6), (4; 8)$  являются решениями системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x = y - 7, \\ 2x + 4y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 18x - y = 0, \\ 5x - y = -4? \end{cases}$$

**1059.** Составьте какую-либо систему линейных уравнений с переменными  $x$  и  $y$ , решением которой служит пара:

$$\text{а) } x=4, y=1; \quad \text{б) } x=0, y=8.$$

**1060.** Решите графически систему линейных уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x - y = 1, \\ x + 3y = 9; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x + 4y = 14; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 3x + 10y = -12. \end{cases} \end{array}$$

**1061.** Решите графически систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y = 6, \\ 3x + 2y = -6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 8y = -5. \end{cases}$$

**1062.** Уясните, имеет ли система решения и сколько:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 4y - x = 12, \\ 3y + x = -8; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 1,5x = 1, \\ 3x + 2y = -2; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 2x - 11 = 2y, \\ 6y - 22 = 4x; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} y - 3x = 0, \\ 3y - x = 6; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x + 2y = 8, \\ y = 0,5x; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} -x + 2y = 8, \\ x + 4y = 10. \end{cases} \end{array}$$

**1063.** Имеет ли решения система уравнений и сколько:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 6y = 1, \\ 2x - 10y = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x + y = 4, \\ x + y - 6 = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 12x - 3y = 5, \\ 6y - 24x = 10? \end{cases}$$

**1064.** Укажите какис-нибудь три решения системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 8y = 5, \\ 3x - 9y = 15; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 1,5y + x = 0,5, \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$$