30. Сложение и умножение числовых неравенств

Рассмотрим теперь, как выполняется сложение и умножение числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 5

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Прибавив к обеим частям неравенства $a < b$ число c, получим $a + c < b + c$. Прибавив к обеим частям неравенства $c < d$ число b, получим $b + c < b + d$. Из неравенств $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$ следует, что $a + c < b + d$.

Теорема справедлива и в случае почленного сложения более чем двух неравенств.

Таким образом,

> если почленно сложить верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

ТЕОРЕМА 6

Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $ac < bd$.

Умножив обе части неравенства $a < b$ на положительное число c, получим $ac < bc$. Умножив обе части неравенства $c < d$ на положительное число b, получим $bc < bd$. Из неравенств $ac < bc$ и $bc < bd$ следует, что $ac < bd$.

Теорема справедлива и для почленного умножения более чем двух неравенств указанного вида.

Таким образом,

> если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство.

Заметим, что если в неравенствах $a < b$ и $c < d$ среди чисел a, b, c и d имеются отрицательные, то неравенство $ac < bd$ может оказаться неверным. Так, перемножив почленно верные неравенства $-1 < 2$ и $-3 < 1$, получим неравенство $3 < 2$, которое не является верным.

СЛЕДСТВИЕ

Если числа a и b положительны и $a < b$, то $a^n < b^n$, где n — натуральное число.

Перемножив почленно n верных неравенств $a < b$, в котор[ых] a и b — положительные числа, получим верное неравенств[о] $a^n < b^n$.

Доказанные свойства используются для оценки суммы, разн[о]сти, произведения и частного.

Пусть, например, известно, что $15 < x < 16$ и $2 < y < 3$. Тр[е]буется оценить сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение xy и час[т]ное $\frac{x}{y}$.

1. Оценим сумму $x + y$.

Применив теорему о почленном сложении неравенств к нераве[н]ствам $15 < x$ и $2 < y$, а затем к неравенствам $x < 16$ и $y < 3$, получ[им] $17 < x + y$ и $x + y < 19$. Результат можно записать в виде двойно[го] неравенства $17 < x + y < 19$. Запись обычно ведут короче:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{\quad 2 < y < 3 \quad} \\ 17 < x + y < 19 \end{array}$$

2. Оценим разность $x - y$.

Для этого представим разность $x - y$ в виде суммы $x + (-y)$. Снач[а]ла оценим выражение $-y$. Так как $2 < y < 3$, то $-2 > -y > -3$, т. [е.] $-3 < -y < -2$. Применим теперь теорему о почленном сложении нер[а]венств:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{\quad -3 < -y < -2 \quad} \\ 12 < x - y < 14 \end{array}$$

3. Оценим произведение xy.

Так как каждое из чисел x и y заключено между полож[и]тельными числами, то они также являются положительными чи[с]лами. Применив теорему о почленном умножении неравенств, п[о]лучим

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \underline{\quad 2 < y < 3 \quad} \\ 30 < xy < 48 \end{array}$$