

732. (Для работы в парах.) Увеличится или уменьшится дробь $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, если к её числителю и знаменателю прибавить по 1?

1) Рассмотрите на примерах, как изменяется дробь $\frac{a}{b}$. (Одному учащемуся рекомендуем взять дроби, у которых числитель меньше знаменателя, а другому — дроби, у которых числитель больше знаменателя.)

2) Обсудите друг с другом ваши наблюдения и выскажите гипотезу для каждого случая.

3) Проведите доказательство: один — для случая $a < b$, а другой — для случая $a > b$.

4) Проверьте друг у друга правильность рассуждений.

733. Докажите, что при $a > 0$ верно неравенство $\frac{a+2}{a} - 2 \geq 2 - \frac{a+2}{2}$.

734. Докажите, что сумма любого положительного числа и числа, ему обратного, не меньше чем 2.

735. Докажите неравенство:

а) $\frac{c^2+1}{2} \geq c$; б) $\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

736. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство: а) $a^2 - 6a + 14 > 0$; б) $b^2 + 70 > 16b$.

737. Выберите из данных неравенств такое, которое не является верным при любом значении a .

1. $a^2 > 2a - 3$ 3. $4a - 4 < a^2$
2. $a^2 + 6 > 4a$ 4. $8a - 70 < a^2$

738. (Для работы в парах.) Докажите, что если a и b — положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$. Пользуясь этим свойством, сравните числа:

а) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} - 2$ и $\sqrt{6} - \sqrt{3}$;
б) $\sqrt{3} + 2$ и $\sqrt{6} + 1$; г) $\sqrt{10} - \sqrt{7}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{6}$.

1) Проведите доказательство приведённого утверждения.

2) Распределите, кто выполняет задания а) и в), а кто — задания б) и г), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнено сравнение выражений. Исправьте ошибки, если они допущены.

739. Докажите, что при $a \geq 0$ и $b \geq 0$ верно неравенство

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

740. Что больше: $a^3 + b^3$ или $ab(a+b)$, если a и b — неравные положительные числа?

741. К каждому из чисел 0, 1, 2, 3 прибавили одно и то же число k . Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности чисел с произведением средних её членов.

742. Одноклассники Коля и Миша вышли одновременно из посёлка на станцию. Коля шёл со скоростью 5 км/ч, а Миша первую половину пути шёл со скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем Коля, а вторую половину пути — со скоростью, на 0,5 км/ч меньшей, чем Коля. Кто из них первым пришёл на станцию?

743. Найдите значение дроби $\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 2}$ при $x = -\frac{1}{3}$.

744. Сократите дробь: а) $\frac{x^2 - 10x + 25}{35 - 7x}$; б) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{(3 - 2x)^2}$.

745. Решите уравнение: а) $\frac{5}{x} = 2 - \frac{3}{x-2}$; б) $\frac{3}{2x-1} = 5x - 9$.

29. Свойства числовых неравенств

Рассмотрим некоторые свойства числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 1

Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

Действительно, если разность $a - b$ — положительное число, то разность $b - a$ — отрицательное число, и наоборот. ○

ТЕОРЕМА 2

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Докажем, что разность $a - c$ — отрицательное число. Прибавим к этой разности числа b и $-b$ и сгруппируем слагаемые:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$