При любом a рассматриваемая разность отрицательна и, следовательно, верно неравенство

$$(a-3)(a-5) < (a-4)^2. \triangleleft$$

Пример 2. Пусть a и b — положительные числа. Как известно, число $\frac{a+b}{2}$ называется средним арифметическим чисел a и b, число $\sqrt{ab}$ — средним геометрическим, число $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ — средним гармоническим. Докажем, что среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое положительных чисел a и b связаны следующим соотношением:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

▶ Докажем сначала, что

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Преобразуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a\sqrt{ab}+b\sqrt{ab}-2ab}{a+b} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ рассматриваемая разность неотрицательна и, следовательно, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Рассмотрим теперь разность $\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2}$:

$$\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} = \frac{2\sqrt{ab}-a-b}{2} = -\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ составленная разность либо является отрицательным числом, либо равна нулю и, значит, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Итак, мы доказали, что если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}. \triangleleft$$

Упражнения

724. Сравните числа a и b, если:
а) $a-b=-0{,}001$; б) $a-b=0$; в) $a-b=4{,}3$.

725. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a-b$ выражаться числом 3,72? −5? 0?

726. Даны выражения

$$3a(a+6) \quad \text{и} \quad (3a+6)(a+4).$$

Сравните их значения при $a=-5$; 0; 40. Докажите, что при любом a значение первого выражения меньше значения второго.

727. Даны выражения

$$4b(b+1) \quad \text{и} \quad (2b+7)(2b-8).$$

Сравните их значения при $b=-3$; −2; 10. Можно ли утверждать, что при любом значении b значение первого выражения больше, чем значение второго?

728. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:
а) $3(a+1)+a < 4(2+a)$;
б) $(7p-1)(7p+1) < 49p^2$;
в) $(a-2)^2 > a(a-4)$;
г) $(2a+3)(2a+1) > 4a(a+2)$.

729. Докажите неравенство:
а) $2b^2-6b+1 > 2b(b-3)$;
б) $(c+2)(c+6) < (c+3)(c+5)$;
в) $p(p+7) > 7p-1$;
г) $8y(3y-10) < (5y-8)^2$.

730. Верно ли при любом x неравенство:
а) $4x(x+0{,}25) > (2x+3)(2x-3)$;
б) $(5x-1)(5x+1) < 25x^2+2$;
в) $(3x+8)^2 > 3x(x+16)$;
г) $(7+2x)(7-2x) < 49-x(4x+1)$?

731. Докажите неравенство:
а) $a(a+b) \geqslant ab$;
б) $m^2-mn+n^2 \geqslant mn$;
в) $10a^2-5a+1 \geqslant a^2+a$;
г) $2bc \leqslant b^2+c^2$;
д) $a(a-b) \geqslant b(a-b)$;
е) $a^2-a \leqslant 50a^2-15a+1$.

6*