



Глава IV НЕРАВЕНСТВА

В этой главе вы познакомитесь со свойствами числовых неравенств, научитесь применять их при сравнении выражений, доказательстве неравенств. Впервые вы встретитесь с понятиями абсолютной и относительной погрешностей, точности приближения, узнаете, какой смысл имеет запись $a \pm h$, которая часто используется на практике различного рода. Основное содержание главы составляет решение неравенств, сводящихся к виду $ax + b > 0$ или к виду $ax + b < 0$, и их систем. Неравенства такого вида решают аналогично тому, как решают уравнения вида $ax + b = 0$, но при этом следует учитывать знак коэффициента a . Геометрическая интерпретация множеств решений неравенств и вводимые понятия пересечения и объединения множеств помогут вам при решении различных задач.

§ 10 ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

28. Числовые неравенства

Мы можем сравнить любые числа a и b и результаты сравнения записать в виде равенства или неравенства, используя знаки $=$, $<$, $>$. Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$. Рассмотрим примеры.

1. Сравним обыкновенные дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{4}{7}$. Для этого приведём их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}; \quad \frac{4}{7} = \frac{32}{56}.$$

Так как $35 > 32$, то $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

2. Сравним десятичные дроби 3,6748 и 3,675. Цифры в разрядах единиц, десятых и сотых совпадают, а в разряде тысячных

в первой дроби стоит цифра 4, а во второй — цифра 5. Так как $4 < 5$, то $3,6748 < 3,675$.

3. Сравним обыкновенную дробь $\frac{9}{20}$ и десятичную дробь 0,45.

Обратив дробь $\frac{9}{20}$ в десятичную, получим, что $\frac{9}{20} = 0,45$.

4. Сравним отрицательные числа -15 и -23 . Модуль первого числа меньше модуля второго. Значит, первое число больше второго, т. е. $-15 > -23$.

В зависимости от конкретного вида чисел мы использовали тот или иной способ сравнения. Однако удобно иметь такой способ сравнения чисел, который охватывает все случаи. Он заключается в том, что составляют разность чисел и выясняют, является ли она положительным числом, отрицательным числом или нулём. Этот способ сравнения чисел основан на следующем определении:

Определение. Число a больше числа b , если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b , если разность $a - b$ — отрицательное число.

Заметим, что если разность $a - b$ равна нулю, то числа a и b равны.

На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее — точкой, лежащей левее. Действительно, пусть a и b — некоторые числа. Обозначим разность $a - b$ буквой c . Так как $a - b = c$, то $a = b + c$.

Если c — положительное число, то точка с координатой $b + c$ лежит правее точки с координатой b , а если c — отрицательное число, то левее (рис. 22).

Значит, если $a > b$, то точка с координатой a лежит правее точки с координатой b , а если $a < b$ — левее.

Покажем, как приведённое определение используется при решении задач.

Пример 1. Докажем, что при любых значениях переменной a верно неравенство

$$(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2.$$

Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем её:

$$\begin{aligned} (a - 3)(a - 5) - (a - 4)^2 &= \\ &= a^2 - 3a - 5a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1. \end{aligned}$$