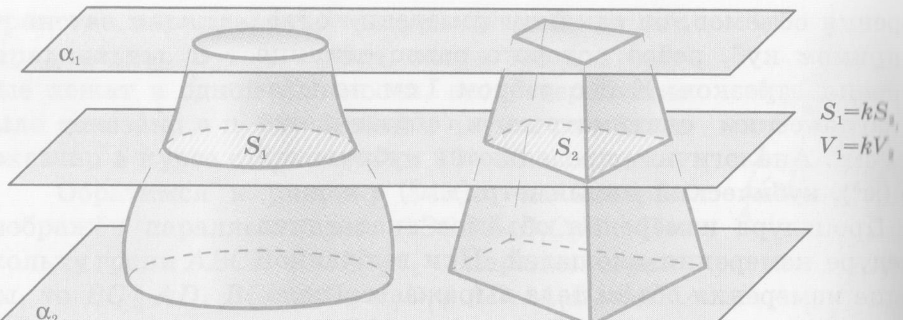


Рис. 348

состоит этот принцип. Рассмотрим два тела, заключённые между двумя параллельными плоскостями α_1 и α_2 (рис. 348). Допустим, что любая плоскость, расположенная между плоскостями α_1 и α_2 и параллельная им, пересекает оба тела так, что площадь сечения первого тела в k раз больше площади сечения второго тела, причём число k — одно и то же для любой такой секущей плоскости. В этом случае, согласно принципу Кавальери, объём первого тела в k раз больше объёма второго тела.

Доказательство теоремы, выражающей принцип Кавальери, основано на понятии определённого интеграла, которое будет введено в 11 классе в курсе алгебры и начал математического анализа. Мы примем эту теорему без доказательства.

127 Свойства прямоугольного параллелепипеда

Когда мы говорим о размерах комнаты, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, то обычно употребляем слова «длина», «ширина» и «высота», имея в виду длины трёх рёбер с общей вершиной. В геометрии эти три величины объединяются общим названием: **измерения прямоугольного параллелепипеда**. Так, у прямоугольного параллелепипеда, изображённого на

рисунке 349, в качестве измерений можно взять ...ины рёбер AB, AD и AA_1.

У прямоугольника два измерения — длина ...ширина. При этом, как мы знаем, **квадрат диа...али прямоугольника равен сумме квадратов ...ух его измерений.**

Оказывается, что аналогичным свойством ...адает и прямоугольный параллелепипед: ...**адрат диагонали прямоугольного паралле...пипеда равен сумме квадратов трёх его изме...ий.**

В самом деле, обратимся к рисунку 349, на ...тором изображён прямоугольный параллелепи...д $ABCDA_1B_1C_1D_1$, и докажем, что

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

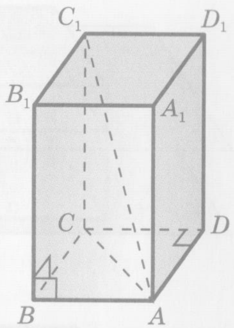
Ребро CC_1 перпендикулярно к плоскости ...ани $ABCD$, т. е. перпендикулярно к любой пря...й, лежащей в плоскости этой грани и проходя...й через точку C. Поэтому угол ACC_1 — пря...й. Из прямоугольного треугольника ACC_1 по ...реме Пифагора получаем: $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$.

Но AC — диагональ прямоугольника $ABCD$, ...этому $AC^2 = AB^2 + AD^2$. Кроме того, $CC_1 = BB_1 = AA_1$. Следовательно, $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$, ...о и требовалось доказать.

Остановимся ещё на одном свойстве, иллю...рирующем аналогию между прямоугольником ...прямоугольным параллелепипедом. Мы знаем, ...о **площадь прямоугольника равна произведе...ю его измерений.**

Оказывается, что аналогичное утверждение ...раведливо и для прямоугольного параллелепи...да: **объём прямоугольного параллелепипеда ...вен произведению трёх его измерений.**

Для доказательства этого утверждения вос...льзуемся принципом Кавальери. Рассмотрим ...начала прямоугольный параллелепипед с изме...ниями a, b, 1 и куб с ребром 1, «стоящие» на ...оскости α (рис. 350, a). Этот куб является еди-



Прямоугольный параллелепипед

Рис. 349