1199 Найдите объём прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$, если $\angle BAC = 120°$, $AB = 5$ см, $AC = 3$ см, а наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см^2.

1200 Найдите объём правильной n-угольной призмы, все рёбра которой равны a, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 8$.

1201 Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней прямые?

1202 Изобразите тетраэдр $DABC$ и на рёбрах DB, DC и BC отметьте соответственно точки M, N и K. Постройте точку пересечения: а) прямой MN и плоскости ABC; б) прямой KN и плоскости ABD.

1203 Изобразите тетраэдр $KLMN$ и постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN.

1204 Изобразите тетраэдр $DABC$, отметьте точки M и N на рёбрах BD и CD и внутреннюю точку K грани ABC. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

1205 Докажите, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

1206 Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды (т. е. сумма площадей её боковых граней) равна половине произведения периметра основания на апофему.

1207 Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна 5 см, а одна из диагоналей равна 8 см. Найдите боковые рёбра пирамиды, если её высота проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 7 см.

1208 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды, если сторона её основания равна a, а площадь боковой грани равна площади сечения, проведённого через вершину пирамиды и бо́льшую диагональ основания.

1209* Через точку H_1 высоты PH пирамиды $PA_1A_2...A_n$ проведена секущая плоскость β, параллельная плоскости α её основания. Докажите, что площадь полученного сечения равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$, где S — площадь основания пирамиды.

Решение

Докажем это утверждение сначала для треугольной пирамиды, а затем — для произвольной пирамиды.

Рассмотрим треугольную пирамиду $PA_1A_2A_3$ и докажем, что рассматриваемое сечение представляет собой треугольник $B_1B_2B_3$, подобный треугольнику $A_1A_2A_3$ с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$ (рис. 358, *а*). Прямоугольные треугольники PHA_1 и PH_1B_1 подобны по двум углам (угол P — общий, $\angle PH_1B_1 = \angle PHA_1 = 90°$, так как в противном случае прямые

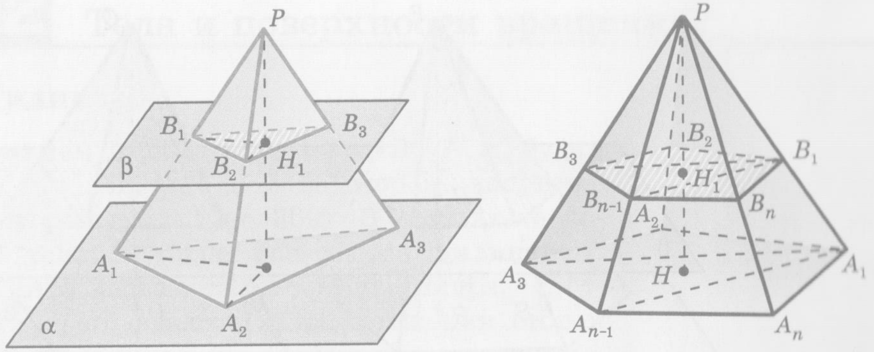

Рис. 358 а) б)

HA_1 и H_1B_1, а значит, и плоскости α и β пересекались бы, что противоречит условию), поэтому $\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{PH_1}{PH} = k$. Аналогично из подобия треугольников PHA_2 и PH_1B_2 находим: $\frac{PB_2}{PA_2} = \frac{PH_1}{PH}$.

Таким образом, $\frac{PB_1}{PA_1} = \frac{PB_2}{PA_2} = k$, откуда следует, что треугольники PB_1B_2 и PA_1A_2 подобны по второму признаку подобия треугольников. Поэтому $\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = k$. Точно так же доказывается, что $\frac{B_2B_3}{A_2A_3} = k$ и $\frac{B_3B_1}{A_3A_1} = k$. Таким образом, треугольники $B_1B_2B_3$ и $A_1A_2A_3$ подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{PH_1}{PH}$, и, следовательно, площадь треугольника $B_1B_2B_3$ равна $\left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S$.

Рассмотрим теперь произвольную пирамиду. Её можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой PH (на рисунке 358, *б* показано разбиение выпуклой пятиугольной пирамиды). Поэтому площадь сечения равна

$$S_{B_1B_2B_3} + \ldots + S_{B_1B_{n-1}B_n} =$$

$$= \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot (S_{A_1A_2A_3} + \ldots + S_{A_1A_{n-1}A_n}) = \left(\frac{PH_1}{PH}\right)^2 \cdot S.$$

1210 Докажите, что объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим две пирамиды, «стоящие» на одной плоскости: произвольную пирами-