Далее, руководствуясь указанным правилом, через точку A проведём в плоскости «передней» грани прямую, параллельную BC, а через точку C в плоскости боковой грани проведём прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с рёбрами нижней грани дают точки E и D (рис. 355, *б*). Остаётся провести отрезок DE, и искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$ — построено.

2) Обратимся теперь к случаю, представленному на рисунке 356, *а*. Этот случай более трудный, чем предыдущий. Можно провести отрезки AB и BC (см. рис. 356, *а*), но что делать дальше? Поступим так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания параллелепипеда. С этой целью продолжим отрезок AB и нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и отрезок AB, до пересечения в точке M (рис. 356, *б*). Далее, через точку M проведём в плоскости нижнего основания прямую, параллельную BC. Это и есть та прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с рёбрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведём прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проведём отрезки AF и CD, и искомое сечение — шестиугольник $ABCDEF$ — построено.

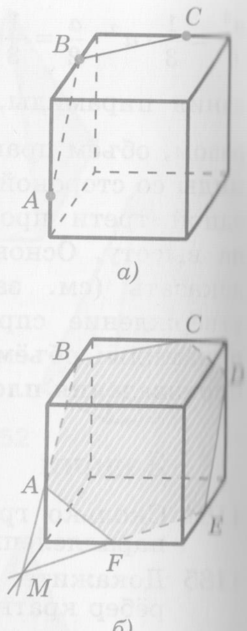

Рис. 356

1189 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью[1]: а) ABC_1; б) ACC_1. Докажите, что построенные сечения — параллелограммы.

1190 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и отметьте точки M и N соответственно на рёбрах BB_1 и CC_1. Постройте точку пересечения: а) прямой MN с плоскостью ABC; б) прямой AM с плоскостью $A_1B_1C_1$.

1191 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью, проходящей через точки B_1, D_1 и середину ребра CD. Докажите, что построенное сечение — трапеция.

[1] Для краткости записи плоскость, проходящую через точки A, B и C_1, мы называем плоскостью ABC_1; аналогичные обозначения плоскостей используются и в других задачах.

1192 Изобразите параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и постройте его сечение плоскостью MNK, где точки M, N и K лежат соответственно на рёбрах: а) BB_1, AA_1, AD; б) CC_1, AD, BB_1.

1193 Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

1194 Ребро куба равно a. Найдите диагональ этого куба.

1195 Тело R состоит из тел P и Q, имеющих соответственно объёмы V_1 и V_2. Выразите объём V тела R через V_1 и V_2, если:
а) тела P и Q не имеют общих внутренних точек;
б) тела P и Q имеют общую часть, объём которой равен $\frac{1}{3}V_1$.

1196 Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 8 см, 12 см и 18 см. Найдите ребро куба, объём которого равен объёму этого параллелепипеда.

1197 Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC_1 = 13$ см, $BD = 12$ см и $BC_1 = 11$ см.

1198 Докажите, что объём призмы равен произведению площади основания на высоту.

Решение

Воспользуемся принципом Кавальери. Рассмотрим призму и прямоугольный параллелепипед с площадями оснований, равными S, и высотами, равными h, «стоящие» на одной плоскости (рис. 357).

Докажем, что объём призмы равен Sh. Любая секущая плоскость, параллельная плоскости оснований, даёт в качестве сечения призмы равный её основанию многоугольник площади S, а в качестве сечения прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник площади S. Следовательно, объём призмы равен объёму параллелепипеда. Но объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту, т. е. равен Sh. Поэтому и объём призмы равен Sh.

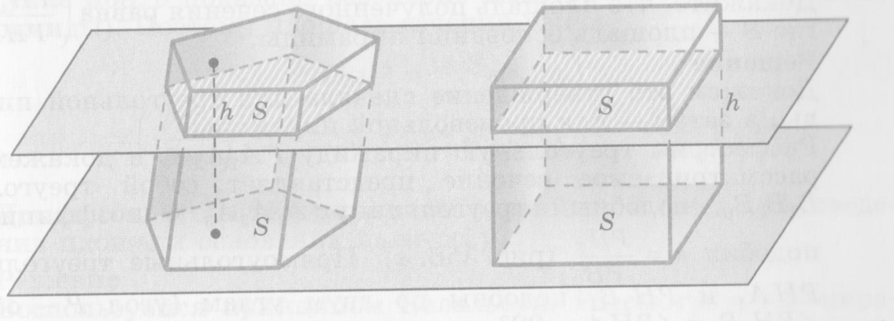

Рис. 357